ACTIVITÉ

-RECTANGLES CARRÉS-

SEMAINE DES MATHS

Matériel :

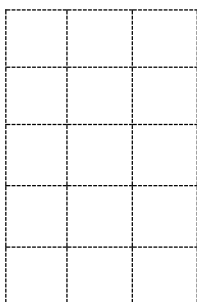
- Une boîte de blocs multi bases ou petits blocs lego
- Feuille d'activité
- Crayon
- Papier

Consignes

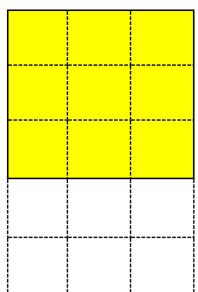
Énoncé du problème de l'exemple :

Une feuille de papier rectangulaire mesure 3 sur 5. On coupe la feuille en deux morceaux, en ligne droite, de façon à obtenir le plus grand carré possible. On jette ce carré et on coupe le morceau restant de la même façon. On continue à couper ainsi tant que cela est possible. Quelle est la mesure du plus petit carré obtenu?
Note : tous les rectangles et les carrés doivent avoir des dimensions entières (pas de fractions).

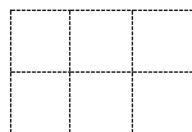
Grille initiale



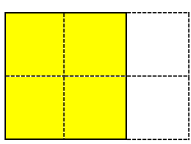
Première coupe



Reste de la première coupe

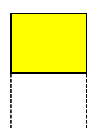


Deuxième coupe

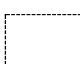


Reste

Dernière coupe



Reste final :



Dimensions : 1 unité par 1 unité

SOLUTION

La longueur du côté du plus petit carré est toujours égale au plus grand commun diviseur (PGCD) des deux nombres.

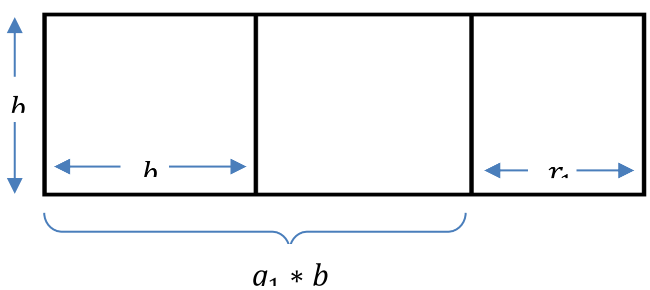
Dans l'exemple, le PGCD de 3 et 5 est 1, puisque ce sont des nombres premiers. Le plus grand commun diviseur est donc 1. Pour la grille 20 par 10 : 10 est un diviseur de 20. C'est pourquoi nous obtenons deux carrés de 10 par 10. Pour la grille de 24 par 15 : le plus petit carré que nous obtenons est de côté 3, puisqu'il s'agit du plus grand commun diviseur de ces deux nombres.

Explications détaillées :

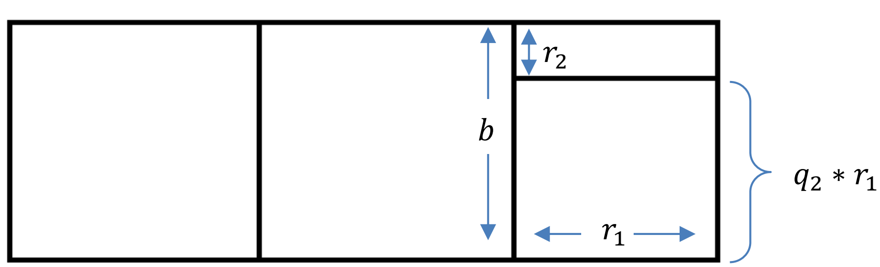
Une façon directe de voir que c'est le plus grand commun diviseur (PGCD) des mesures initiales est de remarquer que le dernier carré obtenu est le plus grand carré qui pourrait servir à paver le rectangle de départ. Cela permet de bien visualiser que la mesure du côté du carré divise en même temps les mesures de la longueur et de la largeur du rectangle initial.

Une autre façon de le voir est de noter que les manipulations effectuées correspondent à l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres.

À la première étape, le plus grand carré possible a toujours comme mesure de côté la longueur du plus petit côté du rectangle initial. Si le plus grand côté du rectangle est au moins deux fois plus grand que le plus petit, on trouvera le même carré lors de la deuxième coupe. En fait, si a correspond à la mesure du plus grand côté du rectangle et b à celle du plus petit côté, on pourra reproduire ce carré autant de fois que b est contenu dans a. Si on écrit $a = q_1 * b + r_1$, où q_1 est un certain entier positif et r_1 est le reste (strictement positif, et toujours plus petit que b), on peut dire qu'on trouvera le carré de côté b à q_1 reprises lors de nos manipulations.



Après avoir enlevé tous les carrés de côté b, il nous reste un rectangle dont les dimensions sont b sur r_1 (car nous avons retiré au côté de longueur a la mesure b, q_1 fois). On répète le même processus avec ce nouveau rectangle. On sait que le plus petit côté est celui qui mesure r_1, et qu'il entre un certain nombre de fois dans b. Écrivons $b = q_2 * r_1 + r_2$. On découpera donc q_2 carrés de côté r_1, et le rectangle restant aura comme dimensions r_1 et r_2.



On poursuit ainsi jusqu'à obtenir un reste de 0. Cela signifie que les carrés formés avec le reste précédent couvrent complètement le dernier rectangle. Le reste précédent correspond donc au PGCD des mesures des côtés du rectangle initial.